Discussion

der

Curve dritten Grades

$$y^2x + ax + by + c = 0$$

für bestimmte Fälle.

Von der

philosophischen Facultät der Universität zu Rostock

genehmigte

Promotionsschrift

von

Hubert zum Egen,

Dr. philos.,

aus Münster in Westfalen.

Münster,

Druck und Papier von Friedrich Regensberg.

1869.

$$y^2x + ax + by + c = 0.$$

§. 1.

Weil die Gleichung der Curve vom dritten Grade ist, so bedeuten selbstverständlich die Constanten a und b Quadrate und c einen Cubus; und zwar sei $a = a_{,} \cdot a_{,}$ und $b = b_{,} \cdot b_{,}$ und $c = c_{,} \cdot c_{,} \cdot c_{,}$. Von den vielen Formen, in denen obige Gleichung sich zeigen kann, je nachdem die Constanten größer oder kleiner als Null oder gleich Null sind, mögen hier diejenigen behandelt werden, welche ein interessantes Resultat oder eine einfache Rechnung liefern.

Als allgemeine Form diene der Fall, wo die drei Constanten jede größer als Null sind.

§. 2.

Construktion der Curve.

Es sei ein rechtwinkliges Parallelkoordinatensystem gewählt.

Unter allen Punkten der Curve lassen sich diejenigen am einfachsten finden, in welchen die Curve die Achsen schneidet.

Setzt man

1) $y = 0$, so erhält man die Abscisse des Durchschnittspunktes der Curve mit der X achse, nämlich $x = -\frac{c}{a}$. Die Construktion dieser Abscisse ist folgende:

$x = -\frac{c}{a} = -\frac{c_{,} \cdot c_{,} \cdot c_{,}}{a_{,} \cdot a_{,}}$. Man suche zu $a_{,}$ und $c_{,}$ die dritte Proportionale $= t$, so daß $a_{,} : c_{,} = c_{,} : t$ ist, und dann zu $a_{,}$ $c_{,}$ und t die vierte Proportionale, so daß $a_{,} : c_{,} = t : x$, denn alsdann ist $t = \frac{c_{,} \cdot c_{,}}{a_{,}}$, und $x = \frac{c_{,} \cdot t}{a_{,}}$, also $x = \frac{c_{,} \cdot c_{,} \cdot c_{,}}{a_{,} \cdot a_{,}} = \frac{c}{a}$.

Das negative Vorzeichen in $x = -\frac{c}{a}$ bedeutet nur, daß die Abscisse auf der negativen Seite der X achse zu nehmen ist.

Man mache (Fig. 1.) $OA = a$, und $OB = c_{,}$, ziehe AB und errichte in B auf AB eine Senkrechte BC, so ist $OC = t$, ziehe durch C zu AB eine Parallele CD, so ist OD in Größe und Lage die gesuchte Abscisse, und D der Durchschnittspunkt der Curve mit der X achse.

2) $x = 0$, so erhält man die Ordinate des Durchschnittspunktes der Curve mit der Y achse, nämlich $y = -\frac{c}{b} = -\frac{c_{,} . c_{,} . c_{,}}{b_{,} . b_{,}}$. Die Construktion dieses Ausdrucks geschieht gerade so, wie die von $x = -\frac{c}{a}$; nur ist $b_{,}$ statt a, zu nehmen, und, damit jener Punkt der Curve sofort seine richtige Lage erhalte, muß $b_{,}$ von O aus auf $OX_{,,}$ und $c_{,}$ auf OY abgetragen werden.

3) $y^2x + ax + by + c = 0$, also $x = -\frac{by + c}{y^2 + a}$. Nimmt man in diesem Ausdruck für y nach und nach verschiedene Werthe an, so erhält man ebensoviele zu den einzelnen y passende x, und dadurch eine beliebige Anzahl von Punkten der Curve. Die Construktion irgend eines Punktes der Curve ist folgende:

$\frac{by + c}{y^2 + a}$ läßt sich zerlegen in $\frac{by}{y^2 + a} + \frac{c}{y^2 + a}$, wo der Nenner die Summe zweier Quadrate bedeutet, welche sich mit Hülfe des Pythagoräischen Lehrsatzes in ein Quadrat vereinen lassen, so daß also $y^2 + a$ etwa $= s^2$ ist; alsdann ist noch zu konstruiren $\frac{by}{s^2} + \frac{c}{s^2}$. Die Construktion von $\frac{c}{s^2}$ ist oben bereits vorgekommen.

$\frac{by}{s^2} = \frac{b_{,} . b_{,} . y}{s . s}$. Man suche zu s und $b_{,}$ die dritte Proportionale ($s : b_{,} = b_{,} : v$) und zu s, y und v die vierte ($s : y = v : x$).

Je nach der Wahl des Werthes von y kann x positiv oder negativ werden.

§. 3.

Spezielle Fälle.

1) $y^2x + ax + by = 0$.

$y = 0$ gibt $x = 0$, ebenso $x = 0$ gibt $y = 0$; die Curve geht durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems.

$x = -\frac{by}{y^2 + a}$; die Curve hat also bei gleichen Ordinaten Abscissen, die um $\left(-\frac{c}{y^2 + a}\right)$ von denen der allgemeinen Curve verschieden sind.

2) $y^2x + ax + c = 0$.

$y = 0$ gibt $x = -\frac{c}{a}$ (cfr. §. 2. 1.)

$x = 0$ gibt ein imaginaires y; diese Curve schneidet also die Y achse nicht.

3) $y^2x + by + c = 0$.

$x = 0$ gibt $y = -\frac{c}{b}$ (cfr. §. 2. 2.)

$y = 0$ gibt $x = -\infty$.

$x = -\frac{by + c}{y^2} = -\left(\frac{by}{y^2} + \frac{c}{y^2}\right) = -\left(\frac{b}{y} + \frac{c}{y^2}\right)$.

4) $y^2x + ax = 0 = x\,(y^2 + a)$.

$x = 0$ gibt ein imaginaires $y = \pm\sqrt{-a}$. Ist ax aber negativ, also $y^2x - ax = 0$ gegeben, so gibt $x = 0$ $y = \pm\sqrt{a}$ $= \pm a$,. $y^2x - ax = x\,(y^2 - a) = 0$ ist das System zweier Curven 1) der Y achse ($x = 0$) und 2) zweier in der Entfernung $\pm a$, zur X achse parallelen geraden Linien.

5) $y^2x + by = 0 = y\,(yx + b)$ bedeutet das System der X achse und einer Hyperbel, deren Gleichung auf ihre Asymptoten als Coordinatenachsen bezogen ist. Es ist nämlich $y\,(yx + b) = 0$, wenn $y = 0$ oder $yx + b = 0$, also $yx = -b$ ist. Lautet die Gleichung $y^2x - by = 0$, so geht die Hyperbel durch den ersten und dritten Winkelraum.

6) $y^2x + c = 0$.

Für ein positives c kann x nur negative Werthe annehmen; in

diesem Falle geht die Curve durch den zweiten und dritten Winkelraum. Ist c negativ, so kann x nur positiv sein; die Curve befindet sich also im ersten und vierten Quadranten.

$y^2x + c = 0$ oder $y^2x = - c$ stellt eine sogenannte kubische Hyperbel dar, deren Construktion sehr einfach ist. $y^2x = - c$, also $y^2 = - \frac{c}{x} = - \frac{c_, . c_, . c_,}{x}$; man suche zu x und $c_,$ die dritte Proportionale $(x : c_, = c_, : t)$ und verwandle das Rechteck $t . c_,$ in ein Quadrat, so ist dessen Seite die zu x gehörende Ordinate.

Für bestimmte x gestaltet sich das Auffinden der Ordinaten höchst einfach; z. B.

$x = - c_,$ gibt $y = \pm c_,$

$x = - 2c_,$ gibt $y^2 = \frac{c_,^2}{2}$, $y = \pm \sqrt{\frac{c_,^2}{2}}$

$x = - 4c_,$ gibt $y^2 = \frac{c_,^2}{4}$, $y = \pm \frac{c_,}{2}$ u. s. w. .

§. 4.

Aufgabe.

In einem gegebenen Punkte der Curve eine Tangente an dieselbe ziehen.

Ist der gegebene Punkt $= P. (x', y')$, und die Gleichung der Curve $\varphi (x, y) = 0$, so wird bekanntlich die trigonometrische Tangente des Winkels α, den die Berührende im Punkte (x', y') der Curve mit der X achse bildet, gefunden nach der Formel:

$$\operatorname{tang} \alpha = - \frac{\frac{\delta \varphi (x', y')}{\delta x'}}{\frac{\delta \varphi (x', y')}{\delta y'}}, \text{ wenn}$$

man nach der Differentiation der Funktionen für x und y die Coordinate x' und y' des Berührungspunktes einsetzt.

$\varphi (x, y) = y^2x + ax + by + c = 0,$

$\frac{\delta \varphi (x', y')}{\delta x'} = y'^2 + a,$

$$\frac{\delta\varphi\,(x', y')}{\delta\, y'} = 2\, y'\, x' + b\,,\ \text{also}\ \operatorname{tang}\alpha = -\frac{y'^2 + a}{2\, y'\, x' + b}\,,$$

welcher Ausdruck auf folgende Weise konstruirt wird: Man verwandle das Rechteck $2\, y'\, x'$ in ein Quadrat, das man alsdann mit b in ein Quadrat (d^2) vereinigt, ebenso $y'^2 + a$ in e^2, alsdann ist $\operatorname{tang}\alpha = -\frac{e^2}{d^2} = -\frac{ee}{d} \cdot \frac{1}{d}$. Sei $\frac{ee}{d} = f$, so ist zu konstruiren $d : e = e : f$, also ist $\operatorname{tang}\alpha = -\frac{f}{d}$. Man mache (Fig. 2.) $CB = x'$ (es sei nämlich Punkt $A = \mathfrak{P}\,(x', y')$ und $OD = y'$), beschreibe über CD als Diameter einen Halbkreis, so ist $OE^2 = 2\, y'\, x'$, mache $OF = b$,, so ist $EF^2 = 2\, y'\, x' + b = d^2$; mache endlich $OG = a$,, so ist $GD^2 = e^2$, trage auf OY' ein Stück $OH = EF = d$ und auf OX, $OJ = GD = e$, beide von O aus, ab, verbinde H mit J und errichte $JK \perp JH$, so ist $OK = f$. Zieht man nun durch A die Linie $LM \parallel NK$, so ist LM die verlangte Tangente wenn nämlich $ON = OH$ gemacht ist, denn $\frac{OK}{ON} = \frac{f}{d} = \frac{OM}{OL} = \operatorname{tang}\alpha$.

Liegt A auf der X achse, ist also $y' = 0$, so ergibt sich $\operatorname{tang}\alpha = -\frac{a}{b}$.

Liegt A auf der Y achse, ist also $x' = 0$, so ist $\operatorname{tang}\alpha = -\frac{y'^2 + a}{b}$.

Ist $a = b = 0$, also $y^2 x + c = 0$, so ist $\operatorname{tang}\alpha = -\frac{y'^2}{2\, y'\, x'} = -\frac{y'}{2\, x'}$.

§. 5.

Aufgabe.

Im Punkte $A = \mathfrak{P}.\,(x', y')$ der Curve eine Normale auf der Curve zu errichten.

Die Construktion dieser Normale ist nach vorhergegangener Construktion der Tangente selbstverständlich. Im andern Falle konstruirt sie sich so:

Der Richtungskoefficient der Normale ist das Reciproke des der Tangente. Macht die Normale mit der X achse den Winkel β, so ist $\tan\beta = -\frac{2y'x' + b}{y'^2 + a}$.

§. 6.

Länge der Tangente, Normale, Subtangente und Subnormale.

*) $T = y'\sqrt{1 + \left(\frac{dx'}{dy'}\right)^2} = y'\sqrt{1 + \left(\frac{2y'x' + b}{y'^2 + a}\right)^2}$

$= y'\sqrt{1 + \left(\frac{EF^2}{GD^2}\right)^2} = y'\sqrt{1 + \left(\frac{h}{GD}\right)^2}$, wenn nämlich $\frac{EF^2}{GD} = h$ ($GD : EF = EF : h$) ist, $= y'\sqrt{\frac{GD^2 + h^2 = k^2}{GD^2}}$ $= y'\frac{k}{GD}$. Es ist also T die vierte Proportionale zu GD, y' und k, nämlich $GD : y' = k : T$. Ist $a = b = 0$, so ist

$$T = y'\sqrt{1 + \left(\frac{2x'}{y'}\right)^2} = y'\sqrt{\frac{y'^2 + 4x'^2}{y'^2}} = \sqrt{y'^2 + 4x'^2}.$$

*) $N = y'\sqrt{1 + \left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2} = y'\sqrt{\frac{d^2 + f^2 = g^2}{\alpha^2}} = y'\frac{g}{d}$.

Für $a = b = 0$ ist $N = \frac{y'}{2x'}\sqrt{y'^2 + 4x'^2}$.

$$S_t = y'.\frac{\frac{\delta\varphi}{\delta y'}}{\frac{\delta\varphi}{\delta x'}} = y'.\frac{2y'x' + b}{y'^2 + a} = y'.\frac{h}{GD}.$$

$a = b = 0$ gibt $St = 2x'$.

---

*) Cfr. §. 4.

$$S_n = -y' \frac{\frac{\delta \varphi}{\delta x'}}{\frac{\delta \varphi}{\delta y'}} = -y' . \frac{y'^2 + a}{2\,y'x' + b} = -y' . \frac{f}{d} .$$

$a = b = 0$ gibt $S_n = -\frac{y'^2}{2\,x'}$.

§. 7.

Aufgabe.

Parallel einer gegebenen Geraden $y = px + q$ (L. MN) eine Tangente an die Curve ziehen.

Es kommt darauf an den Berührungspunkt $A = P. (x', y')$ zu bestimmen (Fig. 3.) Es muß sein $\frac{dy'}{dx'} = \tang \alpha = p$ und $y'^2 x' + ax' + by' + c = 0$; also

$\frac{dy'}{dx'} = p = -\frac{y'^2 + a}{2\,y'x' + b}$, $2\,p\,y'x' = -(y'^2 + a) - bp$,

$x' = -\frac{y'^2 + a + bp}{2\,p\,y'}$.

Aus $y'^2 x' + ax' + by' + c$ folgt $x' = -\frac{by' + c}{y'^2 + a}$, also

$\frac{by' + c}{y'^2 + a} = \frac{y'^2 + a + bp}{2\,p\,y'}$,

$(by' + c)\,2py' = (y'^2 + a + bp)\,(y'^2 + a)$,

$(y'^2 + a)^2 + bpy'^2 + abp = 2\,bp\,y'^2 + 2\,cpy'$,

$y'^4 + 2a\,y'^2 + a^2 + abp = bpy'^2 + 2cpy'$,

$y'^4 + y'^2\,(2a - bp) - 2cpy' + a\,(a + bp) = 0$.

Sei $2a - bp = A$,

$-2cp = B$ und

$a\,(a + bp) = C$.

$y'^4 + Ay'^2 = By' + C = 0$ (𝔄.).

Versuchen wir nach Cartesius diese Gleichung des vierten Grades dadurch zu lösen, daß wir sie zerlegen in das Product zweier Gleichungen vom zweiten Grade, etwa in $(y'^2 + zy' + u)\,(y'^2 + sy' + t) = 0$. Da in (𝔄.) der Cubus von y' fehlt; so muß $zy' + sy' = 0$, also $s = -z$ sein.

Mithin $(y'^2 + zy' + u)(y'^2 - zy' + t) = 0$,

$y'^4 + zy'^3 + uy'^2 - zy'^3 - z^2 y'^2 - zuy' + ty'^2 + tzy' + tu = 0$,

$y'^4 + y'^2 (u - z^2 + t) + y' (tz - uz) + tu = 0$ (B.).

Vergleichen wir diese Gleichung mit (A.), so finden wir, daß ist

$$(1)\quad A = t + u - z^2,$$
$$(2)\quad B = z(t - u) \text{ und}$$
$$(3)\quad C = tu.$$

$$(1)\quad t + u = A + z^2$$
$$(2)\quad t - u = \frac{B}{z}$$

$$2t = A + z^2 + \frac{B}{z}$$
$$2u = A + z^2 - \frac{B}{z}$$

$$4tu = A^2 + 2Az^2 + z^4 - \frac{B^2}{z^2} = 4C\ (3),$$
$$z^6 + 2Az^4 + z^2(A^2 - 4C) - B^2 = 0.$$
$$z^2 = v.$$
$$v^3 + 2Av^2 + v(A^2 - 4C) - B^2 = 0.$$
$$v = w - \frac{2A}{3}$$

$$\begin{aligned}
v^3 &= w^3 - 2Aw^2 + \frac{4A^2}{3} w - \frac{8A^3}{27}\\
2Av^2 &= \quad + 2Aw^2 - \frac{8A^2}{3} w + \frac{8A^3}{9}\\
v(A^2 - 4C) &= \qquad\qquad + A^2 w - \frac{2A^3}{3}\\
&\qquad\qquad\qquad - 4Cw + \frac{8AC}{3}\\
-B^2 &= \qquad\qquad\qquad\qquad - B^2
\end{aligned}$$

$$0 = w^3 - w\left(\frac{A^2}{3} + 4C\right) + \left(\frac{8AC}{3} - B^2 - \frac{2A^3}{27}\right).$$

Sei $-\left(\frac{A^2}{3} + 4C\right) = \pi$ und $\frac{8AC}{3} - B^2 - \frac{2A^3}{27} = \varphi$; also $w^3 + \pi w + \varphi = 0$ (C.), welche Gleichung nach Cardanus aufgelöset gibt:

$w' = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}\varphi + \sqrt{(\frac{1}{2}\varphi)^2 + (\frac{1}{3}\pi)^3}} +$
$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}\varphi - \sqrt{(\frac{1}{2}\varphi)^2 + (\frac{1}{3}\pi)^3}}$, welcher Ausdruck sich berechnen läßt, da der Werth von π und φ aus den Werthen von A, B und C, und die Werthe letzterer aus den bekannten Werthen a, b, c und p gefunden werden können.

Aus w berechnen wir v, hieraus z. Alsdann ergeben sich leicht t und u und hiermit y'.

Ist $(\frac{1}{3}\pi)^3 > (\frac{1}{2}\varphi)^2$ und negativ, so ergibt Gleichung (C.) den bekannten casus irreducibilis; dann erhält man aber drei Werthe für w', die sämmtlich reell sind, während sonst w'' und w''' imaginair sind.

Anmerkung 1. Parallel der Y achse eine Tangente an die Curve ziehen.

Y achse: $x = 0$; $\alpha = 90^0$; $\text{tang}\ \alpha = \infty$.

$$\text{tang}\ \alpha = -\frac{y'^2 + a}{2y'x' + b} = \infty, \text{ also}$$

$$2y'x' + b = 0,$$
$$2y'x' = -b,$$
$$x' = -\frac{by' + c}{y'^2 + a},$$
$$2y'. \frac{by' + c}{y'^2 + a} = b,$$
$$2by'^2 + 2cy' = by'^2 + ab,$$
$$by'^2 + 2cy' = ab,$$
$$y' = -\frac{c}{b} \pm \sqrt{a + \left(\frac{c}{b}\right)^2}.$$
$$\frac{c}{b} = r \quad (\text{cfr. §. 2. 2.}),$$
$$a + \left(\frac{c}{b}\right)^2 = a + r = o^2, \text{ also}$$
$$y' = -r \pm o, \text{ also}$$
$$y'_{,} = -r + o = n,\ y'_{,,} = -r - o = -m.$$
$$x' = -\frac{by' + c}{y'^2 + a},$$
$$x'_{,} = -\frac{bn + c}{n^2 + a = l^2} = -\left(\frac{bn}{l^2} + \frac{c}{l^2}\right).$$

$\frac{c}{i^2}$ $\left(\text{cfr. §. 2. 1.} \frac{c}{a}\right)$;

$\frac{bn}{i^2}$ $\left(\text{cfr. §. 2. 3.} \frac{by}{s^2}\right)$.

$$x'_{,,} = - \frac{c - bm}{m^2 + a = i^2} = \frac{bm}{i^2} - \frac{c}{i^2}.$$

$\frac{c}{i^2}$ $\left(\text{cfr. §. 2. 1.} \frac{c}{a}\right)$;

$\frac{bm}{i^2}$ $\left(\text{cfr. §. 2. 3.} \frac{by}{s^2}\right)$.

Es sind also zwei zur Y achse parallelle Tangenten möglich. Der Berührungspunkt der einen liegt im zweiten, der der andern im vierten Quadranten.

Anmerkung 2. Parallel der X achse eine Tangente ziehen.

X achse: $y = 0$; $\alpha = 0$; $\tang \alpha = 0$,

also $- \frac{y'^2 + a}{2\, y'x' + b} = 0$, also

$$y'^2 + a = 0,$$

$$y' = \pm \sqrt{-a}\,.$$

Es ist mithin keine Tangente möglich.

Anmerkung 3. Für die Curve $y^2x + ax + by + c = 0$ verwandelt sich Gleichung (A.) in $y'^4 + Ay'^3 + C = 0$.

$y'^2 = \xi$, also

$$\xi^2 + A\xi + C = 0$$

$\xi = - \frac{A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - C}$, was konstruirt werden kann.

$A = 2a - bp = 2a - b'.b'p$; $b'p$ bedeutet die dem Winkel α eines rechtwinkligen Dreiecks gegenüberliegende Kathete, wenn b' dessen anliegende ist; bp ein Rechteck, das in ein Quadrat verwandelt und nach Pythagoras von $2a$ subtrahirt werden kann. Es ist also A ein Quadrat.

Aehnlich wird C konstruirt $= a\,(a + bp)$; sei $a + bp = \chi^2$, also ist $C = a\,.\,\chi^2$, also $\xi = - \frac{A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - a\chi^2} = - \frac{A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A}{2} + a'\chi\right)\left(\frac{A}{2} - a'\chi\right)}$.

$a'\chi$ bedeutet ein Rechteck und kann in ein Rechteck verwandelt mit $\frac{A}{2}$ durch Addition oder Subtraktion vereinigt werden. Ist

$$\frac{A}{2} + a'\chi = \psi^2 \text{ und } \frac{A}{2} - a'\chi = \varrho^2,$$

so ist $\xi = -\frac{A}{2} \pm \psi\varrho$, also

$y' = \pm \sqrt{-\frac{A}{2} + \psi\varrho}$. Das negative Zeichen vor $\psi\varrho$ würde ein imaginaires y' geben. Mithin

$$y'_{,} = \sqrt{-\frac{A}{2} + \psi\varrho}, \quad y'_{,,} = -\sqrt{-\frac{A}{2} + \psi\varrho}.$$

Es ergibt sich ein reelles ξ, so lange $C < \left(\frac{A}{2}\right)^2$, d. h.

$$a(a + bp) < 2a - bp$$

oder $a^2 - 2a < -bp(a + 1)$,

$$a(a - 2) < -bp(a + 1),$$

$$p > -\frac{a(a - 2)}{b(a + 1)},$$

$$\tang \alpha > -\frac{a(a - 2)}{b(a + 1)}.$$

Anmerkung 4. Ist $a = b = 0$, also $y^2x + c = 0$, so ist $\frac{dy'}{dx'} = p = -\frac{y'}{2x'}$, also $x' = -\frac{y'}{2p}$ und $x' = -\frac{c}{y'^2}$.

$$\frac{y'}{2p} = \frac{c}{y'^2},$$

$y'^3 = 2pc = 2pc' . c'^2$ ($2pc'$ cfr. §. 7 Anm. 2. $b'p$).

Es bleibt also die Aufgabe zu lösen, ein Parallelepiped mit quadratischer Grundfläche in einen Würfel zu verwandeln, was mit Hülfe der Cissoide des Diokles geschieht.

Anmerkung 5. $a = c = 0$ gibt $y^2x + by = 0$, $x = -\frac{b}{y}$, also

$y'^4 - pby'^2 = 0$ (cfr. §. 7. A.),

$$y'^2(y'^2 - bp) = 0,$$

$$y'^2 - bp = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} y'_{,} = +\sqrt{bp} \\ y'_{,,} = -\sqrt{bp} \end{array}\right| \begin{array}{l} x'_{,} = -\dfrac{b}{\sqrt{by}}, \\ x'_{,,} = +\dfrac{b}{\sqrt{bp}}. \end{array}$$

§. 8.

Aufgabe.

Von einem Punkte $A = \mathfrak{P}.\ (x'', y'')$ außerhalb der Curve eine Tangente an die Curve ziehen. (Fig. 4.)

Der Berührungspunkt der Tangente sei $B = \mathfrak{P}.\ (x', y')$. Die allgemeine Gleichung einer Linie ist $y = px + q$. Diese muß gelten für $\mathfrak{P}.\ (x'', y'')$, also

$y'' = px'' + q$, und für Punkt (x', y'),

also $y' = px' + q$

$$y'' - y' = p\,(x'' - x').$$

Dies ist die Gleichung der Linie, die durch A und B geht; sie soll Tangente sein, also muß sein $p = \dfrac{dy'}{dx'}$, und für $\mathfrak{P}\ (x', y')$ muß die Gleichung der Curve $y^2x + ax + by + c = 0$ gelten. Mithin ist:

$$y'' - y' = -\frac{y'^2 + a}{2\,y'x' + b}\,(x'' - x'),$$

$$2\,y''\,y'\,x' + by'' - 2y'^2\,x' - by' = -\,y'^2\,x'' - ax'' - y'^2\,x' - ax',$$

$$x'\,(2y''\,y' - y'^2 + a) - by' + y'^2x'' = -\,by'' + ax'',$$

$$x' = -\frac{by' + c}{y'^2 + a},$$

$$-\,2\,b\,y''\,y'^2 + by'^3 - aby' - 2\,c\,y''\,y' + cy'^2 - ac - by'^3 - aby' + y'^4\,x'' + ax''\,y'^2 = -\,by''\,y'^2 - aby'' - ax'\,y'^2 - a^2x'',$$

$$x''\,y'^4 + y'^2\,(ax' + c - by'' + ax'') - (2\,ab + 2\,cy'')\,y' + a\,(by'' + ax'' - c) = 0,$$

$$y'^4 + y'^2\,\frac{ax' + ax'' - by'' + c}{x''} - \frac{2\,(ab + cy'')}{x''}\,y' +$$

$\frac{a}{x''}(ax'' + by'' - c) = 0$. Diese Gleichung ist wie Gleichung (A.) in §. 7. aufzulösen.

§. 9.

Asymptoten.

Man erhält eine Asymptote, wenn für einen unendlichen Werth einer der Veränderlichen die andere Veränderliche einen endlichen Werth annimmt.

$$y^2x + ax + by + c = 0,$$

$$x + \frac{ax}{y^2} + \frac{b}{y} + \frac{c}{y^2} = 0.$$

Für $y = \infty$ konvergiren $\frac{ax}{y^2}$, $\frac{b}{y}$ und $\frac{c}{y^2}$ nach Null; es wird also $x = 0$, d. h. die Y achse ist Asymptote.

Dividirt man $y^2x + ax + by + c = 0$ durch y statt durch y^2, so erhält man:

$yx + \frac{ax}{y} + b + \frac{c}{y} = 0$, woraus für $y = \infty$ $yx + b = 0$, die Gleichung einer Hyperbel (cfr. §. 3. 5.), wird. Es hat die Curve also auch eine hyperbolische Asymptote.

Andere Herleitung der Y achse als Asymptote.

Die Asymptote ist eine Tangente, deren Berührungspunkt unendlich weit liegt, wo also etwa $y' = \infty$ ist. Die Gleichung einer Tangente ist bekanntlich:

$$(y - y')\frac{\delta\varphi}{\delta y'} + (x - x')\frac{\delta\varphi}{\delta x'} = 0,$$

$$(y - y')(2y'x' + b) + (x - x')(y'^2 + a) = 0,$$

$$2y'x'y - 2y'^2x' + by - by' + y'^2x - y'^2x' + ax - ax' = 0.$$

Dividirt man die Gleichung durch y'^2, so ist:

$$\frac{2x'y}{y'} - 2x' + \frac{by}{y'^2} - \frac{b}{y'} + x + \frac{ax}{y'^2} - \frac{ax'}{y_,^2} = 0.$$

$$y' = \infty\,,$$
$$0 - 2x' + 0 - 0 + x + 0 - 0 = 0\,,$$
$$x - 3x' = 0\,,$$
$$x = 3x'\,.$$

x' ist aber $= -\dfrac{by' + c}{y'^2 + a} =$

$$-\frac{y'\left(b + \frac{c}{y'}\right)}{y'^2\left(1 + \frac{a}{y'^2}\right)} = -\frac{b + \frac{c}{y'}}{y'\left(1 + \frac{a}{y'^2}\right)} =$$

$$-\frac{\frac{b}{y'} + \frac{c}{y'^2}}{1 + \frac{a}{y'^2}} = 0\,,$$ wenn $y' = \infty$ ist.

Also $x = 3x' = 0$, d. h. die Y achse ist Asymptote der Curve.

§. 10.

Concavität und Convexität.

Eine Curve $\varphi(x, y) = 0$ ist in einem Punkte (x', y') konkav | konvex gegen die Y achse, wenn $x'.\ \varphi''(x', y') \lesseqgtr 0$ ist.

$$\varphi''(x', y') = -\frac{\frac{\delta^2\varphi}{\delta y'} + 2\,\frac{\delta^2\varphi}{\delta y'\delta x'}\cdot\frac{dx'}{dy'} + \frac{\delta^2\varphi}{\delta x'^2}\left(\frac{dx'}{dy'}\right)^2}{\frac{\delta\varphi}{\delta x'}}$$

$$= -\frac{2x' - 2\,.\,2y'.\frac{2y'x' + b}{y'^2 + a}}{y'^2 + a}$$

$$= \frac{-2y'^2x' - 2ax' + 8y'^2x' + 4by'}{(y'^2 + a)^2}\,;$$

$$x' = -\frac{by' + c}{y'^2 + a}$$

$x' \cdot \varphi'' (x', y') =$

$$- \frac{by' + c}{y'^2 + a} \cdot \frac{4\,by' + (2a - 6\,y'^2)\,\dfrac{by' + c}{y'^2 + a}}{(y'^2 + a)^2}$$

$$= - \frac{(by' + c)\,[4\,by'^3 + 4\,aby' + 2\,aby' - 6by'^3 + 2ac - 6cy'^2]}{(y'^2 + a)^4}$$

$$= - \frac{2\,(by' + c)\,(3\,aby' - by'^3 + ac - 3\,cy'^2)}{(y'^2 + c)^4} \, .$$

Der Divisor $(y'^2 + a)^4$ ist für positive wie negative y stets > 0.

1. Fall. y' sei positiv, so ist $by' + c > 0$.

$3\,aby' - by'^3 + ac - 3\,cy'^2$ ist $\gtrless 0$, wenn

$3\,aby' + ac \gtrless by'^3 + 3\,cy'^2$ oder

$a\,(3\,by' + c) \gtrless y'^2\,(by' + 3\,c)$ ist. Alsdann ist

$x' \cdot \varphi''(x', y') \lessgtr 0$, d. h. die Curve im Punkte (x', y') $\left.\begin{matrix}\text{konkav}\\ \text{konvex}\end{matrix}\right\}$ gegen die Y achse.

2. Fall. y' sei negativ, so ist

$3\,aby' - by'^3 + ac - 3\,cy'^2 \gtrless 0$, wenn

$by'^3 + ac \gtrless 3\,y'\,(ab + cy')$ ist.

$by' + c$ ist $\gtrless 0$, wenn $c \gtrless by'$.

Ist der ganze Dividend $\gtrless 0$, so ist $x' \cdot \varphi''\,(x', y') \lessgtr 0$, d. h. die Curve im Punkte (x', y') $\left.\begin{matrix}\text{konkav}\\ \text{konvex}\end{matrix}\right\}$ gegen die Y achse.

Machen wir von dem Gesagten Anwendung auf die Punkte, in welchen die Curve die Coordinatenachsen schneidet:

1) Ist die Curve in ihrem Durchschnitt mit der Y achse konkav oder konvex gegen die Y achse?

Für diesen Punkt ist $y' = 0$, also $x' \cdot \varphi''\,(x', y') = - \dfrac{2\,c \cdot ac}{a^4} = - \dfrac{2\,c^2}{a^3} < 0$. Die Curve ist also in jenem Punkte konkav gegen die Y achse.

2) Ist die Curve in ihrem Durchschnitt mit der Y achse konvex oder konkav gegen dieselbe?

Für diesen Punkt ist $x' = 0$ und $y' = -\frac{c}{b}$, also $x' . \varphi'' (x', y') = 0$, denn $by' + c = 0$; d. h. die Curve ist in jenem Punkte weder konkav noch konvex gegen die X achse; jener Punkt ist ein Inflexionspunkt der Curve (cfr. §. 11).

§. 11.

Inflexionspunkte.

Für einen Inflexionspunkt muß bekanntlich $x' . \varphi'' (x', y') = 0$ sein. Dies ist der Fall, wenn in dem obigen Ausdruck für $x' . \varphi'' (x', y')$ der Dividend zu Null wird. Zu dem Ende muß entweder $by' + c = 0$ oder $3aby' - by'^3 - 3cy'^2 + ac = 0$ sein.

$by' + c = 0$ gibt $y' = -\frac{c}{b}$, d. h. der Punkt, in dem die Curve die Y achse schneidet, ist ein Inflexionspunkt.

$$3aby' - by'^3 - 3cy'^2 + ac = 0,$$

$$y'^3 + \frac{3c}{b} y'^2 - 3ay' - \frac{ac}{b} = 0.$$

$$y' = z - \frac{c}{b},$$

$$y'^3 = z^3 - \frac{3c}{b} z^2 + \frac{3c^2}{b^2} z - \frac{c^3}{b^3}$$

$$\frac{3c}{b} y'^2 = + \frac{3c}{b} z^2 - \frac{6c^2}{b^2} z + \frac{3c^3}{b^3}$$

$$-3ay' = -3az + \frac{3ac}{b}$$

$$-\frac{ac}{b} = -\frac{ac}{b}$$

$$0 = z^3 - z\left(3a + \frac{3c^2}{b^2}\right) + \frac{2c}{b^3}(c^2 + ab^2) \text{ (I.)},$$

$$z = \sqrt[3]{-\frac{c}{b^3}(c^2 + ab^2) + \sqrt{\frac{c^2}{b^2}(c^2 + ab^2)^2 - \left(a + \frac{c^2}{b^2}\right)^3}} +$$

$$\sqrt[3]{-\frac{c}{b^3}(c^2+ab^2)-\sqrt{\frac{c^2}{b^6}(c^2+ab^2)^2-\left(a+\frac{c^2}{b^2}\right)^3}}.$$

$$\frac{c^2}{b^6}(c^2+ab^2)^2-\left(a+\frac{c^2}{b^2}\right)^3=$$

$$\frac{c^6}{b^6}+\frac{2ac^4}{b^4}+\frac{a^2c^2}{b^2}-a^3-\frac{3a^2c^2}{b^2}-\frac{3ac^4}{b^4}-\frac{c^6}{b^6}=$$

$$=-a^3-\frac{2a^2c^2}{b^2}-\frac{2ac^4}{b^4}=-a\left(a^2+\frac{ac^2}{b^2}+\frac{c^4}{b^4}\right).$$

Also ist die Quadratwurzel in obigem Ausdruck für z imaginair, wir haben also den casus irreducibilis vor uns, woraus wir aber schließen können, daß obige Gleichung des dritten Grades drei **reelle** Werthe für z ergibt. Es sei in Gleichung

$$\text{(I.)}\quad 3a+\frac{3c^2}{b^2}=\frac{3(ab^2+c^2)}{b^2}=p \text{ und}$$

$$\frac{2c}{b^3}(ab^2+c)=q, \text{ so ist}$$

$$z^3-pz+q \text{ (II.) aufzulösen.}$$

$$\sin 3\chi=3\sin\chi-4\sin\chi^3,$$

$$\sin\chi^3-\tfrac{3}{4}\sin\chi+\tfrac{1}{4}\sin 3\chi=0.$$

Sei $\sin\chi=\frac{z}{r}$, also

$$z^3-\tfrac{3}{4}r^2z+\tfrac{1}{4}\sin 3\chi\,.\,r^3=0 \text{ (III.)}.$$

Vergleicht man (II.) mit (III.), so muß $\frac{3}{4}r^2=p$, also $r=\sqrt{\frac{4p}{3}}$, und $\frac{1}{4}r^3\sin 3\chi=q$ sein oder

$$\sin 3\chi=\frac{4p}{r^3}=\frac{4q}{\frac{4}{3}p\sqrt{\frac{4p}{3}}}=\frac{3q}{p}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{4p}{3}}}.$$

$$\text{Also }\sin 3\chi=\frac{3\,.\,2c\,(ab^2+c^2)\,.\,b^2\,.\,b}{3\,.\,b^3\,(ab^2+c^2)\,.\,2\sqrt{ab+c^2}}=\frac{1}{\sqrt{ab^2+c^2}}.$$

Ein solcher Winkel χ ist möglich, da $3q<p\sqrt{\frac{4p}{3}}$ oder $27q^2<4p^3$ ist, denn

$$\frac{27\,.\,4c^2\,(c^4+2ab^2c^2+a^2b^4)}{b^6} \text{ ist } <$$

$4 \cdot 27 \left(a^3 + \frac{3a^2c^2}{b^2} + \frac{3ac^4}{b^4} + \frac{c^6}{b^6}\right)$, denn

$\frac{c^6}{b^6} + \frac{2ac^4}{b^4} + \frac{a^2c^2}{b^2} < a^3 + \frac{3a^2c^2}{b^2} + \frac{3ac^4}{b^4} + \frac{c^6}{b^6}$,

denn $0 < a^3 + \frac{2a^2c^2}{b} + \frac{ac^4}{b^4}$.

$\sin \chi = \frac{z}{r}$, also

$z_, = r \sin \chi = \frac{2\sqrt{ab^2 + c^2}}{b} \sin \chi$.

Man suche also 3χ und hieraus χ Die Werthe von $z_{,,}$ und $z_{,,,}$ erhält man durch Aufsuchung aller der Winkel, deren sinus mit $\sin 3\chi$ gleichen Werth haben:

$\sin 3\chi = \sin (180^0 - 3\chi) = \sin (360^0 + 3\chi) =$
$\sin (3 \cdot 180^0 - 3\chi) = \sin (2 \cdot 360^0 + 3\chi) =$
$\sin (5 \cdot 180^0 - 3\chi) = \sin (3 \cdot 360^0 + 3\chi) =$ u. s. w.

Alle diese Werthe lassen sich auf folgende drei reduziren:

$$z_, = \frac{2\sqrt{ab^2 + c^2}}{b} \cdot \sin \chi,$$

$$z_{,,} = \frac{2\sqrt{ab^2 + c^2}}{b} \cdot \sin (60^0 - \chi),$$

$$z_{,,,} = -\frac{2\sqrt{ab^2 + c^2}}{b} \cdot \sin (240^0 + \chi) =$$

$$-\frac{2\sqrt{ab^2 + c^2}}{b} \cdot \sin (60^0 + \chi).$$

Ist $a = 0$, also die Gleichung $y^2x + by + c = 0$ gegeben, so erhält man $z_, = \sqrt[3]{-\frac{c^3}{b^3}} + \sqrt[3]{-\frac{c^3}{b^3}} = -\frac{2c}{b}$ also

$y_,' = z_, - \frac{c}{b} = -\frac{3c}{b}$. Wie wir eben gefunden, ist

$z_, = \frac{2\sqrt{ab^2 + c^2}}{b} \sin \chi$, also für diesen Fall $z_, = \frac{2c}{b} \sin \chi$, mithin $\sin \chi = -1$,

$\chi = 270^0$.

$$z_{\prime\prime} = \frac{2c}{b} \sin(-210^0) = \frac{2c}{b} \sin 30^0$$
$$= \frac{c}{b};$$
$$y'_{\prime\prime} = z_{\prime\prime} - \frac{c}{b} = 0.$$
$$z_{\prime\prime\prime} = \frac{2c}{b} \sin 330^0 = - \frac{2c}{b} \sin 30^0 =$$
$$- \frac{c}{b};$$
$$y'_{\prime\prime\prime} = z_{\prime\prime\prime} - \frac{c}{b} = - \frac{2c}{b}.$$

§. 12.

Vielfache-, Halte-, Rückkehr-, Isolirte-, Winkel-Punkte.

Soll ein Doppelpunkt möglich sein, so müssen sich in einem Punkte der Curve zwei Tangenten an dieselbe ziehen lassen. Es ist gegeben $\varphi(x, y) = 0$, also ist die erste Ableitung

$$\frac{\delta\varphi}{\delta x} + \frac{\delta\varphi}{\delta y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \ (1).$$

Nun muß für einen Doppelpunkt $\frac{dy}{dx}$ zwei Werthe annehmen können, die der Gleichung (1) genügen. Es muß mithin sein:

$$\frac{\delta\varphi}{\delta x} = 0; \ \frac{\delta\varphi}{\delta y} = 0 \text{ und } \varphi(x, y) = 0.$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta x} = y^2 + a = 0 \text{ gibt } y = \pm \sqrt{-a},$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta y} = 2yx + b = 0 \text{ gibt } x = - \frac{b}{2y} =$$

$$- \frac{b}{\pm 2\sqrt{-a}} = \frac{b\sqrt{-a}}{\pm 2(-a)} = \pm \frac{b\sqrt{-a}}{2a}, \text{ in}$$

$\varphi(x, y) = 0$ gesetzt:

$$y^2x + ax + by + c = 0,$$

$$\mp \frac{b\sqrt{-a}}{2} \pm \frac{b\sqrt{-a}}{2} \pm b\sqrt{-a} + c \text{ nicht } = 0;$$ also existirt kein Doppelpunkt an unserer Curve; alle andere oben genannte Punkte sind bei derselben nicht vorhanden.

§. 13.

Maxima und Minima.

A) Soll die Curve in Bezug auf die Xachse ein Maximum oder Minimum haben, so muß

$$1)\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\delta\varphi}{\delta x}}{\frac{\delta\varphi}{\delta y}} = 0, \text{ also } \frac{\delta\varphi}{\delta x} = 0 \text{ sein.}$$

$$2)\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\text{da } \frac{dy}{dx} = 0\right) - \frac{\frac{\delta^2\varphi}{\delta x^2}}{\frac{\delta\varphi}{\delta y}} \begin{matrix} > 0 \text{ Min.} \\ < 0 \text{ . Max.} \end{matrix}$$

$$y^2x + ax + by + c = 0,$$

$$1)\quad \frac{\delta\varphi}{\delta x} = y^2 + a = 0,$$

$y = \pm\sqrt{-a}$; es hat also die Curve in Bezug auf die Xachse weder ein Maximum noch ein Minimum.

B) Soll die Curve in Bezug auf die Yachse ein Maximum oder Minimum haben, so muß

$$1)\quad \frac{dx}{dy} = -\frac{\frac{\delta\varphi}{\delta y}}{\frac{\delta\varphi}{\delta x}} = 0, \text{ also } \frac{\delta\varphi}{\delta y} = 0 \text{ sein;}$$

$$2)\quad \frac{d^2x}{dy^2} = \left(\text{da } \frac{dx}{dy} = 0\right) - \frac{\frac{\delta^2\varphi}{\delta y^2}}{\frac{\delta\varphi}{\delta x}} \begin{matrix} > 0 \text{ Min.} \\ < 0 \text{ Max.} \end{matrix}$$

$$y^2x + ax + by + c = 0,$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta y} = 2yx + b = 0,$$

$$2yx = -b,$$

$$x = -\frac{by + c}{y^2 + a},$$

$$2by^2 + 2cy = by^2 + ab,$$

$$by^2 + 2cy = ab,$$

$$y = -\frac{c}{b} \pm \sqrt{b + \left(\frac{c}{b}\right)^2};$$

$$y_{,} = -\frac{c}{b} + \sqrt{b + \left(\frac{c}{b}\right)^2},$$

$$y_{,,} = -\frac{c}{b} - \sqrt{b + \left(\frac{c}{b}\right)^2}.$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{\frac{\delta^2\varphi}{\delta y^2}}{\frac{\delta\varphi}{\delta x}} = -\frac{2x}{0}.$$

$\sqrt{b + \left(\frac{c}{b}\right)^2} > \frac{c}{b}$, also ist $y_{,}$ positiv und $y_{,,}$ negativ.

Zu $y_{,}$ gehört ein negatives $x_{,}$ und zu $y_{,,}$ gehört ein $x_{,,} = -\frac{by_{,,} + c}{y_{,,}^2 + a}$.

Wenn $c > by_{,,}$, so ist $x_{,,}$ positiv.

Ist $c > by_{,,}$ oder

$$c > -c - b\sqrt{b + \left(\frac{c}{b}\right)^2}\text{ ? Ja!}$$

Also ist $x_{,,}$ positiv.

$x_{,}$ gibt $\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{2x_{,}}{0} = +\infty$;

$x_{,,}$ gibt $\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{2x_{,,}}{0} = -\infty$.

Die Curve hat also bezüglich der Y achse im Punkte $(x_{,}, y_{,})$, wo

$y_{,} = -\frac{c}{b} + \sqrt{b + \left(\frac{c}{b}\right)^2}$ und

$x_{,} = -\frac{by_{,} + c}{y_{,}^2 + a}$, ein Minimum, welches im zweiten Quadran-

ten liegt, und im vierten Quadranten im Punkte $(x_{,,}, y_{,,})$ ein Maximum, wo $y_{,,} = -\frac{c}{b} - \sqrt{b + \left(\frac{c}{b}\right)^2}$ und $x_{,,} = -\frac{by_{,,} + c}{y_{,,}^2 + a}$ ist.

Construktion des Punktes $(x_{,}, y_{,})$.

$$y_{,} = -\frac{c}{b} \sqrt{b + \left(\frac{c}{b}\right)^2}.$$

Sei $\frac{c}{b} = d$ $\left(\text{cfr. §. 2. 2. } \frac{c}{b}\right)$, also

$$\left(\frac{c}{b}\right)^2 = d^2,$$

$$b + d^2 = e^2,$$

$$\sqrt{b + \left(\frac{c}{b}\right)^2} = e,$$

$$y_{,} = e -- d = f.$$

$$x_{,} = -\frac{by_{,} + c}{y_{,}^2 + a} = -\frac{bf + c}{f^2 + a} \text{ (cfr. §. 2. 3.)}.$$

Construktion des Punktes $(x_{,,}, y_{,,})$.

$$y_{,,} = -\frac{c}{d} - \sqrt{b + \left(\frac{c}{b}\right)^2},$$

$$y_{,,} = -d - e = -g.$$

$$x_{,,} = -\frac{by_{,,} + c}{y_{,,}^2 + a} = -\frac{-bg + c}{g^2 + a} =$$

$$\frac{bg}{g^2 + a} - \frac{c}{g^2 + a}.$$

$$\frac{bg}{g^2 + a} \left(\text{cfr. §. 2. 3. } \frac{by}{y^2 + a}\right) = h,$$

$$\frac{c}{g^2 + a} \left(\text{cfr. §. 2. 3. } \frac{c}{y^2 + a}\right) = k,$$

$$x_{,,} = h - k = l.$$

§. 14.

Krümmungsradius.

$$y^2x + ax + by + c = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2 + a}{2yx + b},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{-2 \cdot 2y \cdot \frac{y^2 + a}{2yx + b} + 2x \cdot \left(\frac{y^2 + a}{2yx + b}\right)^2}{2yx + b}$$

$$= \frac{2(y^2 + a)\left[2y(2yx + b) - x(y^2 + a)^2\right]}{(2yx + b)^3};$$

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} =$$

$$\frac{\left[(2yx + b)^2 + (y^2 + a)^2\right]^{3/2}}{2(y^2 + a)\left[3y^2x + 2by - ax\right]};$$

$$x = -\frac{by + c}{y^2 + a},$$ also

$$R = \frac{\left[\left(b - \frac{2y(by + c)}{y^2 + a}\right)^2 + (y^2 + a)^2\right]^{3/2}}{2(y^2 + a)\left[2by + \frac{a(by + c)}{y^2 + a} - \frac{3y^2(by + c)}{y^2 + a}\right]}$$

$$= \frac{\left[(ab - by^2 - 2cy^2)^2 + (y^2 + a)^4\right]^{3/2}}{2 \cdot \left[2ab + aby + ac - by^3 - 3cy^2\right](y^2 + a)^3}.$$

$x = 0$, also $y = -\frac{c}{b}$ gibt

$$R_{,} = -\frac{\left[b^2 + \left(\frac{ab^2 + c^2}{b^2}\right)^2\right]^{3/2}}{2 \cdot \frac{ab^2 + c^2}{b^2} \cdot 2c} =$$

$$-\frac{\left[b^6 + (ab^2 + c^2)^2\right]^{3/2}}{4bc(ab^2 + c^2)}.$$

Construktion von $R_,$.

$$\frac{ab^2 + c^2}{b^2} = a + \left(\frac{c}{b}\right)^2 = a + d^2 = d_,^2 ;$$

$$b^2 + d_,^4 = b . b + d_,^2 . d_,^2 .$$

$$b = d_, . e_, \text{ , also}$$

$$b^2 + d_,^2 = d_,^2 . e_,^2 + d_,^2 . d_,^2 = d_,^2 (e_,^2 + d_,^2) = d_,^2 . f_,^2 ;$$

$$(d_,^2 . f_,^2)^{3/2} = d_,^3 . f_,^3 . \quad \text{Also}$$

$$R_, = - \frac{d_,^3 . f_,^3}{4c . d_,^2} = - \frac{f_,^3 . d_,}{4c} = - \frac{f_,^2 . f_, . d}{(2c_,)^2 . c_,} .$$

$$\frac{f_,^2}{c_,} = g_, \text{ , also}$$

$$c_, : f_, = f_, : g_, \text{ , also}$$

$$R_, = - \frac{g_, . f_, . d_,}{(2c_,)^2} = - \frac{g_, . f_,}{2c_,} . \frac{d_,}{2c_,} .$$

$$\frac{g_, . f_,}{2c_,} = h_, \text{ , also}$$

$$2c_, : g_, = f_, : h_, \text{ , also}$$

$$R_, = - \frac{h_, . d_,}{2c_,} \text{ , also ist noch}$$

$$\frac{h_, d_,}{2c_,} = i_, \text{ zu konstruiren, also}$$

$$2c_, : h_, = d_, : i_, .$$

$$y = 0 \text{ , also } x = - \frac{c}{a} \text{ gibt}$$

$$R_{,,} = \frac{(a^2 + b^2)^{3/2}}{2ac} .$$

Construktion von $R_{,,}$.

$a^2 + b^2$ ist nach Analogie von $b^2 + d^4$ (cfr. oben) zu konstruiren.

$$a^2 + b^2 = aa + bb ;$$

$$a = b_, . k_, \text{ , also}$$

$$a^2 + b^2 = b_,^2 . k_,^2 + bb =$$

$$b (k_,^2 + b) =$$

$$b . l_,^2 . \quad \text{Also}$$

$$R_{,,} = \frac{(bl_,^2)^{3/2}}{2ac} = \frac{b_,^3 . l_,^3}{2ac} = \frac{b}{2a_,} . \frac{l_,^2}{a_,} . \frac{b_, l_,}{c}$$

$$= m_, \,.\, n_, \,.\, \frac{b_, l_,}{c} = \frac{m_, n_,}{c_,} \,.\, \frac{b_, l_,}{c_,} \,.\, \frac{1}{c_,} =$$

$$o_, \,.\, p_, \,.\, \frac{1}{c_,} = \frac{o_, \,.\, p_,}{c_,} = R_{,,} \,.$$

§. 15.

Evolute.

Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Krümmungskreise für eine Curve $\varphi(x, y) = 0$ ist gegeben durch folgende drei Gleichungen:

(1) $(x - \alpha) + (y - \beta) \frac{dy}{dx} = 0$,

(2) $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y - \beta) \frac{d^2y}{dx^2} = 0$,

(3) $\varphi(x, y) = 0$, wo α und β die Coordinaten des veränderlichen Mittelpunkts des Krümmungskreises sind.

Man multiplizire (1) mit $\frac{d^2y}{dx^2}$ und (2) mit $\frac{dy}{dx}$:

$$(x - \alpha) \frac{d^2y}{dx^2} + (y - \beta) \frac{dy}{dx} \,.\, \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad ,$$

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + (y - \beta) \frac{dy}{dx} \,.\, \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad ,$$

$$- \qquad - \qquad -$$

$$(x - \alpha) = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{dy}{dx} \,.\, \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \,.$$

Aus (2) folgt:

$$(y - \beta) = - \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \,;$$

$$\varphi(x, y) = y^2x + ax + by + c = 0 \,.$$

$$(4)\quad (y-\beta) = -\frac{[(2yx+b)^2+(y^2+a)^2]\,(2yx+b)}{2\,(y^2+a)\,[3y^2x+2by-ax]};$$

$$(5)\quad (x-\alpha) = \frac{(2yx+b)^2+(y^2+a)^2}{2\,(3y^2x+2by-ax)}.$$

Eliminirt man aus (4) und (5) x und y, so erhält man die Gleichung der Evolute.

§. 16.

Die Curve und eine Gerade.

In Folgendem wollen wir die Durchschnittspunkte unserer Curve mit einer geraden Linie untersuchen. Sei gegeben

1) eine Linie parallel der X achse; ihre Gleichung ist:

$$y = + m,$$
$$y^2x + ax + by + c = 0,$$
$$m^2x + ax + bm + c = 0,$$
$$x = -\frac{bm+c}{m^2+a}.$$

Eine solche Linie schneidet also die Curve nur in einem Punkte, der im zweiten Quadranten liegt, und dessen Ordinaten

$y = + m$ und $x = -\frac{bm+c}{m^2+a}$ sind.

oder: $y = - m$, also

$$x = \frac{bm-c}{m^2+a}.$$

Die Linie $y = - m$ schneidet die Curve nur in einem Punkte, der sich im dritten oder vierten Quadranten befindet, je nachdem bm kleiner oder größer als c ist. Ist $bm = c$, also $y = -\frac{c}{b}$, so liegt der Durchschnittspunkt auf der negativen Yachse (cfr. §. 2. 2.).

2) eine Linie parallel der Yachse; ihre Gleichung ist:

$$x = + n;$$
$$y^2x + ax + by + c = 0,$$

$$ny^2 + an + by + c = 0\,,$$

$$y^2 + \frac{b}{n} \cdot y = -\left(a + \frac{c}{n}\right).$$

Diese Gleichung gibt

a) zwei reelle, ungleiche Werthe für y, d. h. die Linie schneidet die Curve in zwei Punkten des vierten Quadranten

$$\left(x_{,} = n,\ y_{,} = -\frac{b}{2n} + \sqrt{\left(\frac{b}{2n}\right)^2 - \left(a + \frac{c}{n}\right)}\right. \text{ und}$$

$$\left. x_{,,} = n\,,\ y_{,,} = -\frac{b}{2n} - \sqrt{\left(\frac{b}{2n}\right)^2 - \left(a + \frac{c}{n}\right)}\right), \text{ wenn}$$

$\left(\frac{b}{2n}\right)^2 > a + \frac{c}{n}$ ist.

b) zwei reelle, gleiche Werthe $\left(\begin{matrix} x_{,} \\ x_{,,} \end{matrix}\right\} = n\,,\ \left.\begin{matrix} y_{,} \\ y_{,,} \end{matrix}\right\} = -\frac{b}{2n}\right)$,

d. h. die Linie ist Tangente an die Curve, wenn $\left(\frac{b}{2n}\right)^2 = a + \frac{c}{n}$ ist.

c) zwei imaginaire Werthe, d. h. die Linie schneidet die Curve nicht, wenn $\left(\frac{b}{2n}\right)^2 < a + \frac{c}{n}$ ist.

oder:

$$x = -n\,,$$

$$-ny^2 - an + by + c = 0\,,$$

$$y^2 - \frac{b}{n}y = \frac{c}{n} - a\,.$$

Man erhält also zwei verschiedene Durchschnittspunkte, wenn $\left(\frac{b}{2n}\right)^2 + \frac{c}{n} > a$ ist. Wenn zugleich $\frac{c}{n} > a$, so liegt der eine Punkt im zweiten, und der andere im dritten Winkelraum. Ist $\frac{c}{n} < a$, so liegen beide Punkte im zweiten Quadranten. Man bekommt eine Tangente, wenn $\left(\frac{b}{2n}\right)^2 + \frac{c}{n} = a$ ist, und gar keinen Durchschnittspunkt, wenn $\left(\frac{b}{2n}\right)^2 + \frac{c}{n} < a$ ist.

3) eine ganz beliebige Linie, deren Gleichung ist:

$$y = px + q\,,$$

$$y^2x + ax + by + c = 0\,,$$

$$x = -\frac{by + c}{y^2 + a} = \frac{y - q}{p}\,,$$

$$-bpy - cp = y^3 + ay - qy^2 - aq\,,$$

$$y^3 - qy^2 + y\,(a + bp) + (cp - aq) = 0\,.$$

Diese Gleichung kann drei reelle Werthe liefern, oder nur einen. Es können also drei Durchschnittspunkte vorhanden sein, oder nur einer. Unter den drei Werthen können zwei einander gleich sein, wenn nicht alle drei; daher können wir sagen: Eine gerade Linie kann unsere Curve in einem Punkte, oder in zwei, oder in drei Punkten schneiden.

Geht die Linie durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems, ist also $q = 0$, so erhält man die Gleichung:

$y^3 + y\,(a + bp) + cp = 0$, über die dasselbe gesagt werden kann, als über obige.

§. 17.

Länge des Bogens.

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}\,,$$

$$ds = dy\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,,$$

$$s = \int dy\sqrt{1 + \left(\frac{2yx + b}{y^2 + a}\right)^2} =$$

$$\int dy\sqrt{\frac{(y^2 + a)^2 + (2yx + b)^2}{(y^2 + a)^2}} =$$

$$\int dy\,.\,\frac{\sqrt{(y^2 + a)^2 + \left(b - 2y\,\frac{by + c}{y^2 + a}\right)^2}}{y^2 + a} =$$

$$\int \frac{dy}{(y^2+a)^2} \sqrt{(y^2+a)^4 + (ab - 2cy - by^2)^2} =$$

$$\int \frac{dy}{(y^2+a)^2} \cdot \left[(y^2+a)^4 + (ab-2cy-by^2)^2\right]^{1/2} =$$

$$\int \frac{dy}{(y^2+a)^2} \cdot \Big[(y^2+a)^2 + \tfrac{1}{2}(y^2+a)^{-2}(ab-2cy-by^2)^2$$
$$- \tfrac{1}{8}(y^2+a)^{-6}(ab-2cy-by^2)^4$$
$$+ \tfrac{1}{16}(y^2+a)^{-10}(ab-2cy-by^2)^6$$
$$- \tfrac{5}{128}(y^2+a)^{-14}(ab-2cy-by^2)^8$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\Big].$$

$$\int \frac{dy\,(y^2+a)^2}{(y^2+a)^2} = \int dy = y \;(1);$$

$$\int \frac{dy}{(y^2+a)^2} \cdot \tfrac{1}{2}(y^2+a)^{-2}(ab-2cy-by^2)^2 =$$

$$\tfrac{1}{2}\int \frac{dy\,(ab-2cy-by^2)^2}{(y^2+a)^4} =$$

$$\tfrac{1}{2}\int \frac{dy\,(a^2b^2 - 4abcy - 2ab^2y^2 + 4c^2y^2 + 4bcy^3 + b^2y^4)}{(y^2+a)^4} =$$

$$\frac{a^2b^2}{2}\int \frac{dy}{(y^2+a)^4} - 2abc\int\frac{ydy}{(y^2+a)^4} - ab^2\int\frac{y^2dy}{(y^2+a)^4}$$

$$+ 2c^2\int\frac{y^2dy}{(y^2+a)^4} + 2bc\int\frac{y^3dy}{(y^2+a)^4} + \frac{b^2}{2}\int\frac{y^4dy}{(y^2+a)^4}.$$

Aus $\frac{1}{(y^2+a)^3} = \frac{y^2+a}{(y^2+a)^4} = \frac{a}{(y^2+a)^4} = \frac{y^2}{(y^2+a)^4}$

folgt

$$\int\frac{dy}{(y^2+a)^4} = -\frac{1}{a}\int\frac{y^2dy}{(y^2+a)^4} + \frac{1}{a}\int\frac{dy}{(y^2+a)^3}.\;(\alpha)$$

Setzen wir jetzt

$$\int\frac{y^2dy}{(y^2+a)^4} = \int y \cdot \frac{ydy}{(y^2+a)^4}$$
$$= \int v \,.\, du_y = uv - \int u\, dv_y,$$

wo $v = y$ und $du_y = \frac{ydy}{(y^2+a)^4}$, so wird

$dv_y = 1$ und $u = -\frac{1}{6\,(y^2+a)^3}$, folglich

$$\int \frac{y^2dy}{(y^2+a)^4} = -\frac{y}{6\,(y^2+a)^3} + \tfrac{1}{6} \int \frac{dy}{(y^2+a)^3} \,.\, (\beta)$$

Wenn wir diesen Ausdruck in (α) einsetzen, so erhalten wir:

$$\int \frac{dy}{(y^2+a)^4} = \frac{y}{6a\,(y^2+a)^3} + \frac{5}{6a} \int \frac{dy}{(y^2+a)^3}\,.$$

Auf dieselbe Weise hätten wir auch den Werth für $\int \frac{dy}{(y^2+a)^2}$ finden können. Wie wir die Bestimmung des Werthes von $\int \frac{dy}{(y^2+a)^4}$ zurückgeführt haben auf $\int \frac{dy}{(y^2+a)^3}$, so können wir durch Wiederholung des obigen Verfahrens die Lösung zurückführen auf

$\int \frac{dy}{y^2+a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \,.\, \text{arc} \,.\, \text{tg}\, \frac{y}{\sqrt{a}}$ und erhalten dann:

$$(2)\quad a^2b^2 \int \frac{dy}{(y^2+a)^4} = \Big[\frac{1}{3\,(2a)} \cdot \frac{y}{(y^2+a)^3} + \frac{5}{3\,.\,2\,.\,(2a)^2} \cdot \frac{y}{(y^2+a)^2} + \frac{5\,.\,3}{3\,.\,2\,.\,1\,.\,(2a)^3} \cdot \frac{y}{(y^2+a)} + \frac{5\,.\,3\,.\,1}{3\,.\,2\,.\,1\,.\,(2a)^3\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}}\, \text{arc.tg}\, \frac{y}{\sqrt{a}}\Big]a^2b^2.$$

$$(3)\quad -\tfrac{1}{2} \int \frac{4abc.ydy}{(y^2+a)^4} = -2abc \int \frac{ydy}{(y^2+a)^4} = (-2abc) \,.\, \frac{-1}{6\,(y^2+a)^3} = \frac{abc}{3\,(y^2+a)^3}\,.$$

$$(4)\quad -ab^2 \int \frac{y^2dy}{(y^2+a)^4} + 2c^2 \int \frac{y^2dy}{(y^2+a)^4} = (2c^2 - ab^2) \int \frac{y^2dy}{(y^2+a)^4} =$$

$$(2c^2 - ab^2) \left[- \frac{y}{6\ (y^2 + a)^3} + {}^1\!/_6 \int \frac{dy}{(y^2 + a)^3}\right].$$

Entwickelt man $\int \frac{dy}{(y^2 + a)^3}$ ähnlich wie oben

$\int \frac{dy}{(y^2 + a)^4}$, so erhält man:

$$\int \frac{dy}{(y^2 + a)^3} = \frac{1}{2\ .\ (2a)} \cdot \frac{y}{(y^2 + a)^2}$$

$$+ \frac{3}{2\ .\ 1\ .\ (2a)^2} \cdot \frac{y}{(y^2 + a)}$$

$$+ \frac{3\ .\ 1\ \ .\ \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{\sqrt{a}}}{2\ .\ 1\ .\sqrt{a}\ .\ (2a)^2\ .\ \sqrt{a}}.$$

Also: $(2c^2 - ab^2) \int \frac{y^2 dy}{(y^2 + a)^4} =$

$${}^1\!/_6\ (2c^2 - ab^2) \left[\frac{1}{2\ .\ (2a)} \cdot \frac{y}{(y^2 + a)^2} + \right.$$

$$\frac{3}{2\ .\ (2a)^2} \cdot \frac{y}{(y^2 + a)} +$$

$$\frac{3}{2\ .\ 1\ .\sqrt{a}\ .\ (2a)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arc.tg} \frac{y}{\sqrt{a}} -$$

$$\left. \frac{y}{(y^2 + a)^3}\right].$$

(5) $2bc \int \frac{y^3 dy}{(y^2 + a)^4} = 2bc \int \frac{y^2\ .\ ydy}{(y^2 + a)^4} =$

Set $y^2 + a = A^2$,

$2ydy = 2tdt$,

$ydy = tdt$,

$y^2 = t^2 - a$,

$$= 2bc \int \frac{(t^2 - a)\ tdt}{(t^2)^4} = 2\,bc \int \frac{dt}{t^5} - 2\,bc \int \frac{adt}{t^7}$$

$$= - \frac{bc}{2t^4} + \frac{abc}{3t^6} = bc \left[\frac{a}{3\ (y^2 + a)^3} - \frac{1}{2\ (y^2 + a)^2}\right].$$

$$(6)\quad \frac{b^2}{2}\int\frac{y^4dy}{(y^2+a)^4} = \frac{b^2}{2}\int\left(y^2-\frac{ay^2}{y^2+a}\right)\frac{dy}{(y^2+a)^3}$$

$$= \frac{b^2}{2}\int\frac{y^2dy}{(y^2+a)^3} - \frac{ab^2}{2}\int\frac{y^2dy}{(y^2+a)^4}$$

$$= \frac{b^2}{2}\int\left(1-\frac{a}{y^2+a}\right)\frac{dy}{(y^2+a)^2} - \frac{ab^2}{2}\int\frac{y^2dy}{(y^2+a)^4}$$

$$= \frac{b^2}{2}\int\frac{dy}{(y^2+a)^2} - \frac{ab^2}{2}\int\frac{dy}{(y^2+a)^3} - \frac{ab^2}{2}\int\frac{y^2dy}{(y^2+a)^4}.$$

$$\frac{b^2}{2}\int\frac{dy}{(y^2+a)^2} = \frac{b^2}{4(\sqrt{a})^3}\left[\frac{\sqrt{a}\cdot y}{y^2+a} + \text{arc}\,.\,\text{tg}\,\frac{y}{\sqrt{a}}\right].$$

Es ist $\dfrac{a-y^2+a+y^2}{2a} = 1$, also

$$\int\frac{dy}{(a+y^2)^2} = \frac{1}{2a}\left[\int\frac{a-y^2}{(a+y^2)^2}dy + \int\frac{a+y^2}{(a+y^2)^2}dy\right]$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\int\frac{a-y^2}{(a+y^2)^2}dy + \int\frac{dy}{a+y^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{y}{y^2+a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\,\text{arc}\,.\,\text{tg}\,\frac{y}{\sqrt{a}}\right].$$

$\int\frac{dy}{(y^2+a)^3}$ ist bereits oben vorgekommen, ebenso $\int\frac{y^2dy}{(y^2+a)^4}$.

$$\int\frac{dy}{(y^2+a)^2}\cdot(-1/8)\cdot(y^2+a)^{-6}(ab-2cy-by^2)^4$$

$$= -1/8\int\frac{(ab-2cy-by^2)^4\,dy}{(y^2+a)^8}.$$

Bei der Integration dieses Ausdrucks werden wir folgende Integrale zu behandeln haben:

(1) $\int\frac{dy}{(y^2+a)^8}$, (2) $\int\frac{ydy}{(y^2+a)^8}$, (3) $\int\frac{y^2dy}{(y^2+a)^8}$,

(4) $\int\frac{y^3dy}{(y^2+a)^8}$, (5) $\int\frac{y^4dy}{(y^2+a)^8}$, (6) $\int\frac{y^5dy}{(y^2+a)^8}$,

(7) $\int\frac{y^6dy}{(y^2+a)^8}$, (8) $\int\frac{y^7dy}{(y^2+a)^8}$, (9) $\int\frac{y^8dy}{(y^2+a)^8}$.

Zeigen wir in der Entwicklung dieser Integrale zugleich die allgemeine Behandlung solcher, so haben wir die Möglichkeit der Integration des Werthes für s dargelegt.

(1) $\int \frac{dy}{(y^2 + a)^3}$, allgemein $\int \frac{dy}{(y^2 + a)^p}$.

$$\int \frac{dy}{(y^2 + a)^p} = \frac{1}{(2p - 2).a} \cdot \frac{y}{(y^2 + a)^{p-1}}$$

$$+ \frac{2p - 3}{(2p - 2).a} \cdot \int \frac{dy}{(y^2 + a)^{p-1}}$$

Aus $\frac{1}{(y^2 + a)^{p-1}} = \frac{y^2 + a}{(y^2 + a)^p} = \frac{y^2}{(y^2 + a)^p} + \frac{a}{(y^2 + a)^p}$ folgt:

$$\int \frac{dy}{(y^2 + a)^p} = -\frac{1}{a} \int \frac{y^2 dy}{(y^2 + a)^p} + \frac{1}{a} \int \frac{dy}{(y^2 + a)^{p-1}} \quad (\alpha).$$

Setzen wir jetzt

$$\int \frac{y^2 dy}{(y^2 + a)^p} = \int y \cdot \frac{y dy}{(y^2 + a)^p} = \int v du_y = u.v - \int u.dv_y,$$

wo $v = y$ und $du_y = \frac{y dy}{(y^2 + a)^p}$, so wird

$dv_y = 1$ und $u = \frac{-1}{(2p - 2)(y^2 + a)^{p-1}}$, folglich

$$\int \frac{y^2 dy}{(y^2 + a)^p} = -\frac{y}{(2p - 2)(y^2 + a)^{p-1}}$$

$$+ \frac{1}{2p - 2} \int \frac{dy}{(y^2 + a)^{p-1}}.$$

Wenn wir diesen Ausdruck in (α) einsetzen, so erhalten wir das angeführte Resultat. Auf demselben Wege hätten wir auch den Werth für $\int \frac{dy}{(y^2 + a)^2}$ finden können.

So wie wir die Werthbestimmung von $\int \frac{dy}{(y^2 + a)^p}$ zurückgeführt haben auf $\int \frac{dy}{(y^2 + a)^{p-1}}$, so können wir durch Wiederholung des obigen Verfahrens die Lösung zurückführen auf

$\int \frac{dy}{y^2 + a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arc.tg} \frac{y}{\sqrt{a}}$ und erhalten dann:

$$\int \frac{dy}{(y^2 + a)^p} = \frac{1}{(p-1).(2a)} \cdot \frac{y}{(y^2 + a)^{p-1}}$$

$$+ \frac{2p - 3}{(p-1)(p-2).(2a)^2} \cdot \frac{y}{(y^2 + a)^{p-2}}$$

$$+ \frac{(2p-3)(2p-5)}{(p-1)(p-2)(p-3).(2a)^3} \cdot \frac{y}{(y^2 + a)^{p-3}}$$

$$+ \frac{(2p-3)(2p-5)(2p-7)}{(p-1)(p-2)(p-3)(p-4).(2a)^4} \cdot \frac{y}{(y^2 + a)^{p-4}}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{(2p-3)(2p-5)\ldots.5.3}{(p-1)(p-2)\ldots.2.1.(2a)^{p-1}} \cdot \frac{y}{(y^2 + a)}$$

$$+ \frac{(2p-3)(2p-5)\ldots.5.3.1}{(p-1)(p-2)\ldots.2.1.\sqrt{a}.(2a)^{p-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arc.tg} \frac{y}{\sqrt{a}}$$

$$= \frac{y}{2p-1} \cdot \sum_{k=1}^{k=p-1} \frac{(2p-1)^{k|-2}}{(p-1)^{k|-1}} \cdot \frac{1}{(2a)^k (y^2 + a)^{p-k}}$$

$$+ \frac{p}{2p-1} \cdot \frac{(2p-1)^{p|-2}}{p!} \cdot \frac{2\sqrt{a}}{(2a)^p} \operatorname{arc.tg} \frac{y}{\sqrt{a}} .$$

(2) $\int \frac{ydy}{(y^2 + a)^8}$, allgemein $\int \frac{ydy}{(y^2 + a^p}$.

$$\int \frac{ydy}{(y^2 + a)^p} = - \frac{1}{2(p-1)(y^2 + a)^{p-1}} .$$

(3) $\int \frac{y^2dy}{(y^2 + a)^8}$, allgemein $\int \frac{y^2dy}{(y^2 + a)^p}$ (cfr. oben (1)).

(4) $\int \frac{y^3dy}{(y^2 + a)^8}$, allgemein $\int \frac{y^3dy}{(y^2 + a)^p}$.

Man setze $y^2 + a = t^2$, also

$$\int \frac{y^3dy}{(y^2 + a)^p} = \int \frac{(t^2 - a)\, tdt}{t^{2p}} = \int \frac{dt}{t^{2p-3}} - a \int \frac{dt}{t^{2p-1}} =$$

$$- \frac{1}{(2p-4)\,t^{2p-4}} + \frac{a}{(2p-2)\,t^{2p-2}} =$$

$$- \frac{1}{(2p-4)\,(y^2+a)^{p-2}} + \frac{a}{(2p-2)\,(y^2+a)^{p-1}} .$$

(5) $\int \frac{y^4 dy}{(y^2+a)^8}$, allgemein $\int \frac{y^4 dy}{(y^2+a)^p}$.

$$\int \frac{y^4 dy}{(y^2+a)^p} = \int \left(y^2 - \frac{ay^2}{y^2+a}\right) \frac{dy}{(y^2+a)^{p-1}} =$$

$$\int \frac{y^2 dy}{(y^2+a)^{p-1}} \left(\text{cfr. oben } \int \frac{y^2 dy}{(y^2+a)^p}\right) - a \int \frac{y^2 dy}{(y^2+a)^p}$$

(cfr. oben (1)).

(6) $\int \frac{y^5 dy}{(y^2+a)^8}$, allgemein $\int \frac{y^5 dy}{(y^2+a)^p}$.

Man setze $y^2 + a = t^2$, also

$$\int \frac{y^5 dy}{(y^2+a)^p} = \int \frac{(t^2-a)^2\, tdt}{t^{2p}} = \int \frac{dt}{t^{2p-5}} - 2a \int \frac{dt}{t^{2p-3}}$$

$$+ a^2 \int \frac{dt}{t^{2p-1}}$$ (cfr. oben (4)).

(7) $\int \frac{y^6 dy}{(y^2+a)^8}$, allgemein $\int \frac{y^6 dy}{(y^2+a)^p}$.

$$\int \frac{y^6 dy}{(y^2+a)^p} = \int \left(y^4 - \frac{ay^4}{y^2+a}\right) \frac{dy}{(y^2+a)^{p-1}} =$$

$$\int \frac{y^4 dy}{(y^2+a)^{p-1}} \text{ (cfr. oben (5))} - a \frac{y^4 dy}{(y^2+a)^p} \text{ (cfr. oben (4))}.$$

(8) $\int \frac{y^7 dy}{(y^2+a)^8}$, allgemein $\int \frac{y^7 dy}{(y^2+a)^p}$.

Man setze $y^2 + a = t^2$.

(9) $\int \frac{y^8 dy}{(y^2+a)^8}$, allgemein $\int \frac{y^8 dy}{(y^2+a)^p}$.

$$\int \frac{y^8 dy}{(y^2+a)^p} = \int \left(y^6 - \frac{ay^6}{y^2+a}\right) \frac{dy}{(y^2+a)^{p-1}} =$$

$$\int \frac{y^6 dy}{(y^2+a)^{p-1}} \text{(cfr. oben (7))} - a \int \frac{y^6 dy}{(y^2+a)^p} \text{ (cfr. l. c.)} .$$

Es bleibt noch das ganz allgemeine Integral $\int \frac{y^q dy}{(y^2+a)^p}$ zu behandeln übrig, wo q die Werthe 0 . 1 , 2 , ... p annehmen kann; p selbst ist stets eine Paarzahl. Also

(10) $q = 0$, $\int \frac{dy}{(y^2+a)^p}$ (cfr. oben (1)) .

(11) q ungerade , $\int \frac{y^q dy}{(y^2+a)^p}$. Man setze $y^2 + a = t^2$.

(12) q gerade , $\int \frac{y^q dy}{(y^2+a)^p}$. Man dividire y^q durch (y^2+a).

Sind die entwickelten Reihen konvergent, so muß das Integral von s noch zwischen bestimmten Grenzen genommen werden, z. B. $y = 0$ und $y = -\frac{c}{b}$.

§. 18.

Schwerpunkt der Curve.

Sind die Ordinaten des Schwerpunktes der Curve x' und y', so ist $s \cdot x' = \int x ds$ und $s \cdot y' - \int y ds$; also

$$s.x' = \int -\frac{by+c}{y^2+a} \cdot \frac{dy}{(y^2+a)^2} \cdot \left[(y^2+a)^4 + (ab-2cy-by^2)^2\right]^{1/2} ;$$

$$\text{und } s.y' = \int \frac{ydy}{(y^2+a)^2} \left[(y^2+a)^4 + (ab-2cy-by^2)^2\right]^2 .$$

Beide Ausdrücke geben bereits behandelte Integrale; nur das erste Integral von $s.y'$ lautet $\int ydy = \frac{1}{2} y^2$.

§. 19.

Größe der Fläche.

Die Fläche, begrenzt von der Curve und der Y achse, ist gegeben durch

$$\lambda = \int xdy = -\int \frac{by + c}{y^2 + a}\,dy = -b\int \frac{ydy}{y^2 + a} - c\int \frac{dy}{y^2 + a}.$$

Man setze $y^2 + a = t^2$, so ist

$$\int \frac{ydy}{y^2 + a} = \int \frac{tdt}{t^2} = \int \frac{dt}{t} = l\left(\pm\sqrt{y^2 + a}\right),$$

also $\lambda = -b\,.\,l\left(\pm\sqrt{y^2 + a}\right) - \frac{c}{\sqrt{a}}\,\mathrm{arc\,.\,tg}\,\frac{y}{\sqrt{a}}$.

Beispiel. Man bestimme die Fläche zwischen den Grenzen $y = 0$ und $y = -\frac{c}{b}$,

$$\text{also } \lambda = \int_{y=0}^{y=-\frac{c}{b}} xdy = -b\,.\,l\,(\pm\sqrt{a}) - \frac{c}{\sqrt{a}}\,\mathrm{arc\,.\,tg}\;\infty$$

$$+ b\,.\,l\left(\pm\sqrt{\frac{c^2}{b^2} + a}\right) + \frac{c}{\sqrt{a}}\,\mathrm{arc\,.\,tg}\left(-\frac{c}{b\sqrt{a}}\right) =$$

$$b\,.\left[l\left(\pm\sqrt{c^2 + ab^2}\right) - lb - l\left(\pm\sqrt{a}\right)\right] + \frac{c}{\sqrt{a}}\,\mathrm{arc.tg}\left(-\frac{c}{b\sqrt{a}}\right) =$$

$$b\,.\left[l\left(\pm\sqrt{c^2 + ab^2}\right) - l\left(\pm b\sqrt{a}\right)\right] + \frac{c}{\sqrt{a}}\,\mathrm{arc.tg}\left(-\frac{c}{b\sqrt{a}}\right) =$$

$$b\,.\,l\,\frac{\sqrt{c^2 + ab^2}}{b\sqrt{a}} + \frac{c}{\sqrt{a}}\,\mathrm{arc\,.\,tg}\left(-\frac{c}{b\sqrt{a}}\right) =$$

$$b\,.\,l\sqrt{\frac{c^2 + ab^2}{ab^2}} + \frac{c}{\sqrt{a}}\,\mathrm{arc\,.\,tg}\left(-\frac{c}{b\sqrt{a}}\right).$$

§. 20.

Schwerpunkt der Fläche.

$$\lambda \,.\, y' \,.= \int x dy \,.\, y = - \int \frac{by + c}{y^2 + a} dy \,.\, y =$$

$$- b \int \frac{y^2 dy}{y^2 + a} - c \int \frac{y dy}{y^2 + a} = - b \int \left(1 - \frac{a}{y^2 + a}\right) dy$$

$$- c \,.\, l\left(\pm \sqrt{y^2 + a}\right) = - by + ab \int \frac{dy}{y^2 + a} - c \,.\, l\left(\pm \sqrt{y^2 + a}\right)$$

$$= - by - \sqrt{a} \,.\, b \,.\, \text{arc} \,.\, \text{tg} \frac{y}{\sqrt{a}} - c \,.\, l\left(\pm \sqrt{y^2 + a}\right) \,.$$

Die Grenzen $y = 0$ und $y = - \frac{c}{b}$ ergeben

$$\lambda \,.\, y' = 0 - 0 - c \,.\, l\,(\pm \sqrt{a}) - c + \sqrt{a} \,.\, b \,.\, \text{arc} \,.\, \text{tg} \left(- \frac{c}{b\sqrt{a}}\right)$$

$$+ c \,.\, l\left(\pm \sqrt{\frac{c^2}{b^2} + a}\right) = - c \,.\, l(\pm \sqrt{a}) - c + \sqrt{a} \,.\, b \,.\, \text{arc} \,.\, \text{tg}\left(- \frac{c}{b\sqrt{a}}\right)$$

$$+ c \,.\, l\,(\pm \sqrt{c^2 + ab^2}) - c \,.\, lb =$$

$$c \,.\, \left[l\,(\pm \sqrt{c^2 + ab^2}) - l(\pm \sqrt{a}) - lb\right] - c + \sqrt{a} \,.\, b \,.\, \text{arc} \,.\, \text{tg}\left(- \frac{c}{b\sqrt{a}}\right)$$

$$= c \,.\, l \sqrt{\frac{c^2 + ab^2}{ab^2}} - c + \sqrt{a} \,.\, b \,.\, \text{arc} \,.\, \text{tg} \left(- \frac{c}{b\sqrt{a}}\right) \,.$$

$$\lambda \,.\, x' = \tfrac{1}{2} \int x^2 dy = \tfrac{1}{2} \int \left(\frac{by + c}{y^2 + a}\right)^2 dy =$$

$$\frac{b^2}{2} \int \frac{y^2 dy}{(y^2 + a)^2} + bc \int \frac{y dy}{(y^2 + a)^2} + \frac{c^2}{2} \int \frac{dy^2}{(y^2 + a)^2} \,.$$

Sämmtliche Integrale sind bereits vorgekommen.

§. 21.

Rotationsoberfläche.

Rotirt die Curve um die Y achse, so ist die dadurch erzeugte Oberfläche gegeben durch:

$$A = \int 2\pi \,.\, x ds = 2\pi \,.\, \int x ds \quad (\text{cfr. §. 18}) \,.$$

§. 22.

Schwerpunkt der Rotationsoberfläche.

Da eine solche Rotationsfläche symmetrisch um die Y achse vertheilt ist, so liegt ihr Schwerpunkt in der Y achse; man hat also nur y′ zu bestimmen.

$$A \,.\, y' = \int y dA = \int y \,.\, 2\pi \,.\, x ds = 2\pi \int y.x.ds$$

$$= 2\pi \,.\int y \,.\left(-\frac{by+c}{y^2+a}\right)\frac{dy}{(y^2+a)^2}\left[(y^2+a)^4+(ab-2cy-by)^2\right]^2$$

Hierin sind bereits behandelte Integrale enthalten.

§. 23.

Rotationskörper.

Unter der im §. 21 gegebenen Bedingung ist das Volumen des Rotationskörpers =

$$V = \int \pi x^2 dy = \pi \int x^2 dy \text{ (cfr. §. 20 } \lambda . x').$$

§. 24.

Schwerpunkt des Rotationskörpers.

Wegen der symmetrischen Vertheilung liegt der Schwerpunkt des Rotationskörpers auf der Rotationsachse, also auf der Y achse; es ist also nur sein y′ zu bestimmen.

$$V \,.\, y' = \int x^2 . \pi dy . y = \pi \int x^2 y dy =$$

$$\pi \int \left(\frac{by+c}{y^2+a}\right)^2 y dy =$$

$$b^2\pi \int \frac{y^3 dy}{(y^2+a)^2} + 2bc\pi \int \frac{y^2 dy}{(y^2+a)^2} + c^2\pi \int \frac{y dy}{(y^2+a)^2}.$$

Die Behandlung solcher Integrale ist bereits gezeigt.

§. 25.

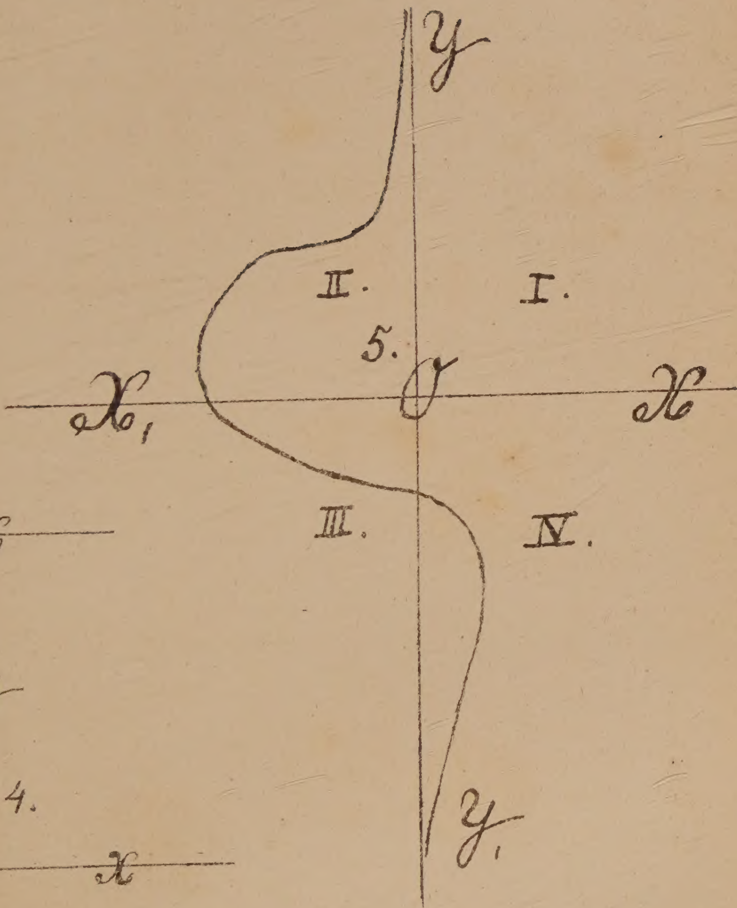
Lauf der Curve.

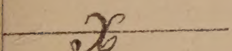
Zum Schluß sei mit dem Bilde der Curve (Fig. 5.) ihr Lauf angegeben. Die Curve kommt im zweiten Quadranten aus der positiven Unendlichkeit, schneidet die negative X achse in einer Entfernung $\frac{c}{a}$ vom Anfangspunkte des Coordinatensystems, bewegt sich durch den dritten Quadranten, um die negative X achse in einer Entfernung $\frac{c}{b}$ vom Anfangspunkte des Systems zu schneiden, und erstreckt sich nun im vierten Quadranten in die negative Unendlichkeit hinein.

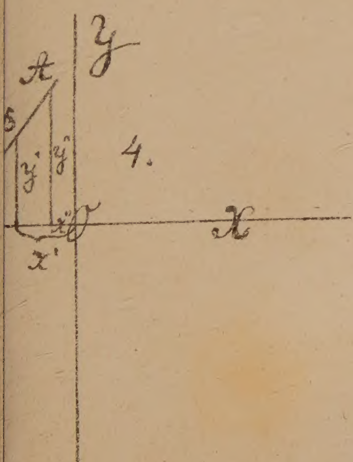
Die Curve schmiegt sich innig an die Y achse an, die für sie eine Asymptote ist.

Druckfehler.

Seite 5	Zeile 10	von oben	lies	OY,	statt	OY'	
„ 6	„ 7	„	„	$\left(\frac{dx'}{dy'}\right)^2$	statt	$\left(\frac{dx'^2}{dy'}\right)$	
„ 6	„ 13	„	„	d^2	statt	α^2	
„ 7	„ 6	„ unten	„	$+$	„	$=$	
„ 17	„ 4	„	„	c	„	1	
„ 31	„ 6	„	„	t^2	„	A^2.	


y
II.
I.
5.
O
X₁
X
III.
IV.
y₁


x


y
A
4.
O
x
x'